

## MATEMÁTICA FINANCEIRA ON LINE

### Aula Gratuita

([Clique aqui para assistir à aula gravada](#))

### PORCENTAGEM

#### Introdução

A porcentagem é o estudo da matemática financeira mais aplicado ao nosso dia-a-dia.

É freqüente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades. Alguns exemplos:

- A gasolina teve um aumento de 15% - Significa que em cada R\$100 houve um acréscimo de R\$15,00
- O cliente recebeu um desconto de 10% em todas as mercadorias. Significa que em cada R\$100 foi dado um desconto de R\$10,00
- Dos jogadores que jogam no Grêmio, 90% são craques. - Significa que em cada 100 jogadores que jogam no Grêmio, 90 são craques.

A idéia de porcentagem foi utilizada em épocas tão remotas como a do antigo Império Romano.

O imperador Augusto cobrava um imposto de 1/100 sobre o preço da venda de todos os bens. No século XV manuscritos italianos utilizavam expressões como “20 p100” e “XX p cento” para indicar vinte por cento.

Em 1650, o sinal “per ÷” era utilizado para indicar porcentagem. Posteriormente esse sinal se perdeu no tempo, e ficou o sinal que se utiliza atualmente: “%” .

#### Razão centesimal

Toda a razão que tem para conseqüente o número 100 denomina-se **razão centesimal**. Alguns exemplos:

$$\frac{7}{100}, \frac{16}{100}, \frac{125}{100}, \frac{210}{100}$$

Podemos representar uma razão centesimal de outras formas:

$$\frac{7}{100} = 0,07 = 7\% \quad (\text{lê-se "sete por cento"})$$

$$\frac{16}{100} = 0,16 = 16\% \quad (\text{lê-se "dezesesseis por cento"})$$

$$\frac{125}{100} = 1,25 = 125\% \quad (\text{lê-se "cento e vinte e cinco por cento"})$$

As expressões 7%, 16% e 125% são chamadas **taxas centesimais** ou **taxas percentuais**.

Considere o seguinte problema:

João vendeu 50% dos seus 50 cavalos. Quantos cavalos ele vendeu?  
Para solucionar esse problema devemos aplicar a taxa percentual (50%) sobre o total de cavalos.

$$50\% \text{ de } 50 = \frac{50}{100} \cdot 50 = \frac{2500}{100} = 25 \text{ cavalos}$$

Logo, ele vendeu 25 cavalos, que representa a **porcentagem** procurada.

## Definição de porcentagem

**Porcentagem** é um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: “por cento”.

Deste modo, a fração  $\frac{20}{100}$  é uma porcentagem que podemos representar por 20%.

É  **muito importante** observar que quando escrevemos “**25 por cento**” podemos fazê-lo de **três maneiras**:

**25%** ..... É a **forma percentual**, clássica, é mais indicada na textualização, na comunicação entre as pessoas, em qualquer forma não matemática.

$\frac{25}{100}$  ou  $\frac{1}{4}$  ..... É a **forma fracionária**, e é indicada nos cálculos e equacionamento de problemas.

**0,25** ..... Esta é a **forma decimal ou unitária**, a **mais indicada** nos cálculos e equacionamento de problemas.

Para obtermos a forma decimal de 25% nós simplesmente deslocamos “a vírgula” duas casas à esquerda de 25% , que resulta em **0,25** .

Alguns exemplos:

### Exemplo 1:

De um grupo de 100 jogadores, 30 praticam basquete. **Isso significa que 30%** (trinta por cento) **dos jovens praticam basquete.**

### Exemplo 2:

Num lote de 50 lâmpadas, 13 apresentam defeito; a razão entre o número de lâmpadas defeituosas e o total de lâmpadas é dada por:

$$\frac{13}{50} = \frac{26}{100} = 26\%$$

(Note: In the original image, dashed lines and 'x2' labels indicate the multiplication of both numerator and denominator by 2 to reach a denominator of 100.)

O que significa que, se o lote contivesse 100 lâmpadas, deveríamos encontrar 26 com defeitos.

### Exemplo 3:

Outro modo de representar a taxa de  $4\% = \frac{4}{100}$  é obtido, simplesmente, efetuando a divisão de 4 por 100:

◆  $4 : 100 = 0,04$

Da forma:

▶  $37\% = 0,37$                       ▶  $80\% = 0,80 = 0,8$

▶  $14,5\% = 0,145$                     ▶  $100\% = 1$

▶  $250\% = 2,50 = 2,5$               ▶  $0,7\% = 0,007$

### Exercício Resolvido:

1) Um jogador de futebol, ao longo de um campeonato, cobrou 75 faltas, transformando em gols 8% dessas faltas. Quantos gols de falta esse jogador fez?

$$8\% \text{ de } 75 = \frac{8}{100} \cdot 75 = \frac{600}{100} = 6$$

Portanto o jogador fez 6 gols de falta.

### Exercícios Propostos:

1. Um jogador de basquete, ao longo do campeonato, fez 250 pontos, deste total 20% foram com cestas de 02 pontos. Quantas cestas de 02 pontos o jogador fez?
2. Um aluno teve 30 aulas de uma determinada matéria. Qual o número máximo de faltas que este aluno pode ter sabendo que ele será reprovado, caso tenha faltado a 30% (por cento) das aulas ?

## Cálculo de uma Porcentagem

Todo o cálculo de porcentagem, como informado, é baseado no número 100.

O cálculo de tantos por cento de uma expressão matemática ou de um problema a ser resolvido é indicado pelo símbolo (%), e pode ser feito, na soma, por meio de uma proporção simples.

Para que se possam fazer cálculos com porcentagem (%), temos que fixar o seguinte:

1) A taxa está para porcentagem (acréscimo, desconto, etc), assim como o valor 100 está para a quantia a ser encontrada.

Exemplificando:

Um título vale 30% do valor total de R\$ 100,00. Qual o valor do título?

100% : R\$ 100,00

30% : X

X = R\$ 30,00

2) O número que se efetua o cálculo de porcentagem é representado por 100.

Exemplificando:

Efetue o cálculo 10% de 50

100% : 50

10% : X

100X = 500 → X = 5

Obs. Nos dois exemplos dados foram usados o sistema de cálculo de regra de três.

3) O capital informado tem sempre por igualdade ao 100.

Exemplificando:

Efetua-se o resgate de um cheque pré-datado no valor de R\$ 150,00 e obtém-se um desconto de 20%. Qual é o valor do desconto?

100% : R\$ 150,00

20% : X

100X = 3000 → X = R\$ 30,00

### **Exercícios Resolvidos:**

01. Quatro é quantos por cento de cinco?

Resolução

Seja x% a taxa percentual, temos pela definição que:

$$\frac{x}{100} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 80\%$$

ou de outra forma:

$$\frac{4}{5} = 0,8 = \frac{80}{100} = 80\%$$

Resposta: 80%

02. Quanto é 23% de 200 000?

Resolução

$$23\% \text{ de } 200\ 000 = \frac{23}{100} \cdot 200\ 000 = 46\ 000$$

Resposta: 46 000

03. Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução

$$67\% \text{ de } 56\ 000 = \frac{67}{100} \cdot 56\ 000 = 37\ 520$$

Resposta: 37 520 pessoas.

04. Quanto é 20% de 70%?

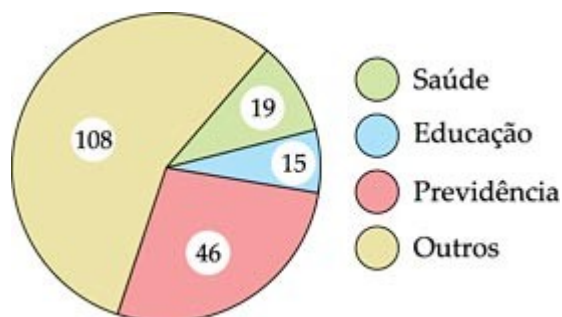
Resolução

$$20\% \text{ de } 70\% = \frac{20}{100} \cdot \frac{70}{100} = 0,14 \text{ ou } 14\%$$

Resposta: 14%

### Exercícios Propostos:

3. (Fuvest-SP) Quanto é  $(10\%)^2$  ?
4. (Vunesp-SP) O gráfico publicado pela revista Veja, de 28/7/99, mostra como são divididos os 188 bilhões de reais do orçamento da União entre os setores de Saúde, Educação, Previdência e outros.



Se os 46 bilhões de reais gastos com a Previdência fossem totalmente repassados aos demais setores de modo que 50% fossem destinados à saúde, 40% à educação e os 10% aos outros, determine o aumento que o setor de Saúde teria:

- a) em reais;
  - b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente.
5. (Unicamp-SP) Como se sabe, os icebergs são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um iceberg corresponda a  $\frac{8}{9}$  do seu volume total e que o volume da parte não submersa é de 135 000 m<sup>3</sup>.
- a) Calcule o volume total do iceberg.
  - b) Calcule o volume de gelo puro do iceberg supondo que 2% de seu volume total é constituído de “impurezas”, como matéria orgânica, ar e minerais.

### Lucro

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.

Lucro = preço de venda – preço de custo.

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de prejuízo.

Assim, podemos escrever:

- Preço de custo + lucro = preço de venda.
- Preço de custo – prejuízo = preço de venda.
- Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:

$$\text{Lucro sobre o custo} = \frac{\text{lucro}}{\text{preço de custo}} \cdot 100\%$$
$$\text{Lucro sobre a venda} = \frac{\text{lucro}}{\text{preço de venda}} \cdot 100\%$$

Observação – A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.

#### Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R\$ 500,00 e vendida por R\$ 800,00. Pede-se:

- a) o lucro obtido na transação;
- b) a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;
- c) a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

**Resolução**

a)

$$\text{Lucro} = 800 - 500 \Rightarrow \text{Lucro} = \text{R\$ } 300,00$$

b)

$$\text{LC} = \frac{300}{500} = 0,60 = 60\%$$

c)

$$\text{LV} = \frac{300}{800} = 0,375 = 37,5\%$$

**Exercícios Resolvidos:**

1. Um objeto custa R\$ 75,00 e é vendido por R\$ 100,00. Determinar:

- a) a porcentagem de lucro em relação ao preço de custo;
- b) a porcentagem de lucro em relação ao preço de venda.

**Resolução**

Preço de custo + lucro = preço de venda

$$75 + \text{lucro} = 100$$

$$\text{Lucro} = \text{R\$ } 25,00$$

a)

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Preço de Custo}} = \frac{100 - 75}{75} = \frac{25}{75} \cong 33,33\%$$

b)

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Preço de Venda}} = \frac{100 - 75}{100} = \frac{25}{100} \cong 25\%$$

02. (PUC-SP) O preço de venda de um bem de consumo é R\$ 100,00. O comerciante tem um ganho de 25% sobre o preço de custo deste bem. O valor do preço de custo é:

**Resolução**

Ganho = lucro

$$\frac{\text{lucro}}{\text{preço de custo}} \cdot 100\% = 25\% \Rightarrow \text{lucro} = 0,25 \cdot (\text{preço de custo})$$

$$\text{Preço de custo} + \text{lucro} = \text{preço de venda}$$

$$\text{Preço de custo} + 0,25 (\text{preço de custo}) = \text{preço de venda}$$

$$1,25 \cdot (\text{preço de custo}) = 100$$

$$\text{Preço de custo} = \text{R\$ } 80,00$$

### Exercícios Propostos:

- Um celular foi comprado por R\$ 300,00 e revendido posteriormente por R\$ 340,00, qual a taxa percentual de lucro sobre o preço original?
- (Cesgranrio-RJ) João vendeu dois rádios por preços iguais. Um deles foi vendido com lucro de 20% sobre o preço de custo e o outro com prejuízo de 20% sobre o preço de custo. No total, em relação ao capital investido, João teve lucro ou prejuízo, de quanto?

## Aumento Percentual

Consideremos um valor inicial  $V$  que deve sofrer um aumento de  $p\%$  de seu valor. Chamemos de  $A$  o valor do aumento e  $V_A$  o valor após o aumento. Então,

$$A = p\% \text{ de } V = \frac{p}{100} \cdot V$$

$$V_A = V + A = V + \frac{p}{100} \cdot V$$

$$V_A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V$$

em que  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  é o fator de aumento ou multiplicação.

### Exemplos

Valor inicial	Aumento percentual	Fator de aumento	Valor aumentado
50	24%	1,24	$1,24 \cdot 50$
40	5%	1,05	$1,05 \cdot 40$
70	250%	3,50	$3,50 \cdot 70$

## Desconto Percentual

Consideremos um valor inicial  $V$  que deve sofrer um desconto de  $p\%$  de seu valor. Chamemos de  $D$  o valor do desconto e  $V_D$  o valor após o desconto. Então,

$$D = p\% \text{ de } V = \frac{p}{100} \cdot V$$

$$V_D = V - D = V - \frac{p}{100} \cdot V$$

$$V_D = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot V$$

em que  $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$  é o fator de desconto.

### Exemplos

Valor inicial	Desconto percentual	Fator de desconto	Valor descontado
50	24%	0,76	$0,76 \cdot 50$
40	5%	0,95	$0,95 \cdot 40$
70	1,5%	0,985	$0,985 \cdot 70$

### Exercícios Resolvidos

01. Dado o valor  $V$ , exprimir em função de  $V$ :

- o valor de um aumento de 20%;
- o valor após um aumento de 20%;
- o valor de um desconto de 30%;
- o valor após um desconto de 30%.

#### Resposta

- a)  $0,2 V$       c)  $0,3 V$   
 b)  $1,20 V$       d)  $0,7 V$

2. (Fuvest-SP) Aumentando-se os lados  $a$  e  $b$  de um retângulo em 15% e 20%, respectivamente, a área do retângulo é aumentada de:

#### Resolução

Área inicial:  $a \cdot b$

Área final:  $1,15 \cdot a \cdot 1,20 \cdot b = 1,38 \cdot a \cdot b = 1,38 \cdot \text{área inicial} \Rightarrow$  aumento de 38%.

### Exercícios Propostos

- Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R\$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?
- (Vunesp-SP) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por  $x$  reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

### Aumentos e Descontos Sucessivos

Consideremos um valor inicial  $V$ , e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de  $p_1\%$  e  $p_2\%$ . Sendo  $V_1$  o valor após o primeiro aumento, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)$$

Sendo  $V_2$  o valor após o segundo aumento, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)$$

$$V_2 = V \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)$$

Sendo  $V$  um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de  $p_1\%$  e  $p_2\%$ .

Sendo  $V_1$  o valor após o primeiro desconto, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 - \frac{p_1}{100}\right)$$

Sendo  $V_2$  o valor após o segundo desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{p_2}{100}\right)$$

$$V_2 = V \cdot \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_2}{100}\right)$$

Se  $V$  um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de  $p_1\%$  e, sucessivamente, um desconto de  $p_2\%$ .

Se  $V_1$  o valor após o aumento, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)$$

Se  $V_2$  o valor após o desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{p_2}{100}\right)$$

### Exercícios Propostos

10. (Mackenzie-SP) Um produto teve um aumento total de preço de 61% através de 2 aumentos sucessivos. Se o 1o aumento foi de 15%, então o 2o foi de:
11. (Fuvest-SP) Barnabé tinha um salário de  $x$  reais em janeiro. Recebeu aumento de 80% em maio e 80% em novembro. Seu salário atual é:
12. (PUC-SP) Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:
13. Um comerciante que não possuía conhecimentos de matemática, comprou uma mercadoria por R\$200,00. Acresceu a esse valor, 30% de lucro e posteriormente aumentou o preço em mais 30%. Certo dia, um freguês pediu um desconto, e o comerciante deu um desconto de 40% sobre o novo preço, pensando que, assim, teria um lucro de 20%. O comerciante teve lucro ou prejuízo? Qual foi esse valor?